



## Digital Methods and Models of Optimization of Public Management Decisions: Generalization of the Harris-Wilson Logistics Costs Model

UDC: 35:3.077.6:004.9:164

DOI: 10.15421/152207

**Starushenko Halyna**Ph.D., Full Prof., <https://orcid.org/0000-0003-4331-4723>, [gsgalastar@gmail.com](mailto:gsgalastar@gmail.com)  
Dnipro University of Technology (Dnipro, Ukraine)

### Abstract

Optimizing the costs of public administration remains one of the urgent problems of the modern development of the Ukrainian state and local self-government. Logistics studies the organization, planning, control and regulation of the movement of material and accompanying information flows in space and time from their initial resource to the final consumer in order to reduce total costs. The logistics system is a complex of elements that are in certain relationships and connections with each other and form a certain integrity focused on flow management.

The task of the logistics system is to ensure the supply of the necessary goods and services at the right time, in the right place, in the right quality and in the right quantity to those consumers who need these goods, subject to the minimization of total costs. It was determined that inventory management is a set of models and methods designed to optimize inventory, i.e. resources that are in storage and designed to meet consumer demand for these resources.

The purpose of this study is to determine the possibilities of using the logistic cost optimization model in the work of public administration bodies. On the basis of the Harris-Wilson stock management model, a generalized model for calculating the optimal order size with variable organizational costs and costs for storing the stock of goods was developed, where the optimality criterion is the minimization of the total costs of the enterprise. A digital model of logistics cost optimization was built and an algorithm for its practical use was provided using the Maple 18 mathematical editor.

**Keywords:** logistics, logistics costs, inventory management, Harris-Wilson model, digital optimization model, variable organizational costs, variable costs for storing inventory

**Citation:** Starushenko, H. (2022). Digital Methods and Models of Optimization of Public Management Decisions: Generalization of the Harris-Wilson Logistics Costs Model. *Public Administration Aspects*, 10(2), 5-15. <https://doi.org/10.15421/152207>

## Цифрові методи і моделі оптимізації публічно-управлінських рішень: узагальнення моделі логістичних витрат Харріса – Уілсона

**Старушенко Галина**

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка» (Дніпро, Україна)

### Анотація

Оптимізація витрат органів публічного управління залишається однією з актуальних проблем сучасного розвитку української держави та місцевого самоврядування. Логістика вивчає організацію, планування, контроль і регулювання руху матеріальних та супутніх їм інформаційних потоків у просторі та часі від їх початкового ресурсу до кінцевого споживача з метою зниження сукупних витрат. Логістична система являє собою комплекс елементів, які перебувають у певних відносинах і зв'язках між собою й утворюють певну цілісність, орієнтовану на управління потоками.

Завданням логістичної системи є забезпечення поставок необхідних товарів та послуг у потрібний час, потрібне місце, необхідної якості та в необхідній кількості тим споживачам, яким ці товари необхідні, за умови мінімізації загальних витрат. Визначено, що управління запасами – комплекс моделей та методів, призначених для оптимізації запасів, тобто ресурсів, які знаходяться на зберіганні та призначені для задоволення попиту споживачів на ці ресурси.

Метою даного дослідження є визначення можливостей використання моделі оптимізації логістичних витрат в роботі органів публічного управління. На основі моделі управління запасами Харріса – Уілсона розроблено узагальнену модель розрахунку оптимального розміру замовлення зі змінними організаційними витратами і витратами на зберігання запасу товару, де критерієм оптимальності є мінімізація сукупних витрат підприємства. Побудовано цифрову модель оптимізації логістичних витрат та надано алгоритм її практичного використання із застосуванням математичного редактора Maple 18.

**Ключові слова:** логістика, логістичні витрати, управління запасами, модель Харріса – Уілсона, цифрова оптимізаційна модель, змінні організаційні витрати, змінні витрати на зберігання запасу товару

**Цитування:** Старушенко Г. Цифрові методи і моделі оптимізації публічно-управлінських рішень: узагальнення моделі логістичних витрат Харріса – Уілсона. *Аспекти публічного управління*. 2022. Том 10. №2. С. 5-15. <https://doi.org/10.15421/152207>



### Вступ

Логістика складає одну із складових ефективного управління у публічній сфері, оскільки тісно пов'язана з діяльністю як державних органів так і органів місцевого самоврядування. В загальноприйнятому значенні – це наука, що вивчає організацію, планування, контроль і регулювання руху матеріальних та супутніх їм інформаційних потоків у просторі та часі від їх початкового ресурсу до кінцевого споживача з метою зниження сукупних витрат. Логістична система являє собою комплекс елементів, які перебувають у певних відносинах і зв'язках між собою й утворюють певну цілісність, орієнтовану на управління потоками.

Метою роботи логістичної системи є забезпечення поставок необхідних товарів та послуг у потрібний час, потрібне місце, необхідної якості та в необхідній кількості тим споживачам, яким ці товари необхідні, за умови мінімізації загальних витрат.

В якості критеріїв оцінки (показників) ефективності роботи логістичної системи можуть бути використані:

- обсяг логістичних послуг;
- рівень витрат на надання логістичних послуг;
- продуктивність логістичної системи;
- тривалість логістичних циклів;
- рівень невиробничих витрат, втрат та штрафів;
- рівень витрат через надлишок товарних запасів;
- повернення інвестиції в логістичну систему (віддача вкладень у розвиток);
- якість обслуговування споживачів та ін.

Часто використовують комплексні критерії, наприклад, загальні логістичні витрати компанії, що складаються з:

- витрат за виконання логістичних операцій (операційні витрати);
- збитків від логістичних ризиків;
- втрат, пов'язаних з непродуктивними логістичними рішеннями та неякісним логістичним сервісом;
- витрат на логістичне адміністрування та IT-підтримку.

Оптимізація логістичних процесів – процедура, яка дозволяє за рахунок змін параметрів її роботи, зі збереженням при цьому заданого рівня якості обслуговування

споживачів, звести до мінімуму витрати та ризики, скоротити розходи, покращити якість роботи та підвищити конкурентоспроможність підприємства.

З метою оптимізації логістичних процесів доцільним є використання інтегрованого підходу до логістики, що вимагає об'єднання її різних функціональних областей та їх учасників у рамках єдиної логістичної системи. Такий підхід поширюється як на мікроекономічний рівень самого підприємства, так і на весь ланцюжок поставок, і дозволяє усунути конфлікти між функціональними підрозділами підприємства та забезпечити інтегровану взаємодію з логістичними бізнес-партнерами.

Управління запасами – комплекс моделей та методів, призначених для оптимізації запасів, тобто ресурсів, які знаходяться на зберіганні та призначені для задоволення попиту споживачів на ці ресурси.

Задача управління запасами за суттю – оптимізаційна задача, що полягає в мінімізації загальних витрат, пов'язаних зі збереженням на складах підприємств і фірм призначених для продажу запасів сировини, заготовок, готової продукції, напівфабрикатів тощо.

Зміни на сучасному етапі розвитку економіки України, створення значної кількості приватних комерційних організацій, вимоги диверсифікації ризиків, необхідність орієнтуватися на запити споживачів, наявність конкурентів призвели до суттєвої зміни процесу управління, вимагаючи максимальної гнучкості та адаптивності організацій до нових умов господарювання. Контроль попиту, виражена цінова політика, необхідність швидкої зміни асортименту продукції і, як слідство, оптимізація запасів є актуальним завданням у нових умовах сучасного етапу становлення ринкової економіки.

**Метою дослідження** є визначення можливостей використання моделі управління запасами Харріса – Уілсона в роботі органів публічного управління.

Завданнями, які мають бути вирішені у цьому дослідженні є:

- визначити сутність управління запасами як однієї з найважливіших функцій логістики;



- проаналізувати класичну модель Харріса – Уїлсона;
- визначити обмеження класичної моделі;
- побудувати узагальнену модель розрахунку оптимального розміру замовлення зі змінними організаційними витратами і витратами на зберігання запасу товару;
- на основі узагальненого математичного співвідношення Харріса – Уїлсона розробити цифрову модель оптимізації логістичних витрат.

#### **Огляд досліджень і публікацій.**

Посилена увага науковців щодо теоретичних основ логістики та її використання в управлінні розпочалася з середини 50-тих років минулого століття, коли були сформульовані близькі до сучасного визначення, терміни, категорії і концепції логістики (Ларіна, 2005, с. 17).

В сучасній теорії логістики дослідники приділяють значну увагу питанням оптимізації функціонування логістичних систем з точки зору мінімізації загальних витрат для виробників і споживачів та розробці відповідних моделей і методів логістичної координації.

Так, у статті Т. Данько та А. Беломитцевої (2011) розглянуто п'ять основних логістичних моделей, які можуть застосовуватися для підвищення ефективності управління каналом розподілу:

- модель симуляції;
- динамічна логістична модель для оптимальної доставки;
- змішана модель транспортування та вартості запасів;
- логістична блочна модель;
- модель SCOR.

Виявлені та проаналізовані переваги й недоліки цих моделей, визначені умови та ситуації, в яких є доцільним їх використання.

В монографії Р. Ларіна (2004) висвітлені теоретичні та методологічні аспекти формування регіональних ринків як основи регіональних логістичних систем. Наведено характеристику й особливості регіональної логістики та розкриті передумови її розвитку. Викладені підходи до моделювання регіональної логістичної системи, встановлені фактори, що обумовлюють її стійкість і надійність. Визначено методологію

оцінки результативності функціонування регіональної логістичної системи та описано модель оптимізації логістичної збутової системи регіонів. Опрацьовані питання управління регіональними логістичними системами та розглянуті стратегії їх комплексного розвитку.

Стаття Я. Санько та Д. Григорової (2011) присвячена вивченню основних видів моделей управління запасами, характеристиці їх сильних та слабких сторін. Досліджено формування витратної частини логістичної системи при визначенні цінової політики підприємства. Наведено математичну модель визначення доходів підприємства з урахуванням витрат на утримання запасів, яка дасть можливість підприємству ефективніше управляти товарними запасами в умовах ринкового середовища, що на рівні оперативного управління виразиться в систематизації залишків товарних запасів, можливості їх планування, контролю й аналізу.

В роботі Я. Чорнорот (2015) розроблена базова модель управління запасами з використанням математичного апарату теорії комплексних чисел. Проведено аналіз отриманих результатів у випадках, якщо розмір заказу дорівнює оптимальному; об'єм заказу менше оптимального; об'єм заказу перевищує оптимальний.

Проблемні питання щодо практичного застосування моделі оптимального розміру замовлення Харріса – Уїлсона розглянуто в статті С. Архіпова (2012); запропоновані шляхи подолання обмежень, пов'язаних з умовами її використання. Отримана модифікована формула дозволяє обґрунтувати можливість створення рівня запасу (розміру замовлення), відмінного від розрахованого за співвідношенням Харріса – Уїлсона, без істотної зміни рівня загальних витрат.

В статті В. Хаврука (2012) проведено аналіз і порівняння основних систем управління запасами, надано оцінку їх недоліків та переваг. Визначено перевагу системи з фіксованим розміром замовлення перед системою з фіксованим інтервалом часу між замовленнями за рахунок скорочення площ, займаних запасами, що приводить до економії на витратах по зберіганню запасів на складі.



В публікаціях О. Черпа (2007; 2010а; 2010b) розглядаються питання управління матеріально-технічними запасами із застосуванням логістичних моделей з метою мінімізації витрат і забезпечення одержання прибутку, ефективної життєдіяльності та сталого розвитку підприємств у ринкових умовах господарювання.

В монографії В. Перебийніс та Я. Дробота (2012) запропонована трирівнева система управління матеріальними запасами підприємств, надано пропозиції щодо вдосконалення формування оцінки ефективності логістичного управління запасами, обґрунтована сукупність стратегій логістичного управління запасами зерна, які включають стратегію обережності, стратегію додаткового резерву, стратегію частини від попиту, стратегію «точно вчасно» та стратегію обмежуючих чинників.

В дослідженні В. Різника (2015) виділені три основні концепції рівня запасів: максимізації, оптимізації, мінімізації. Наведені найбільш розповсюджені системи управління запасами: з фіксованою величиною замовлення та з фіксованим інтервалом часу між замовленнями. Розглянуті гібридні системи: система зі встановленою періодичністю поповнення запасів до встановленого рівня; система «мінімум-максимум»; оперативного управління; опціонального поповнення; система з необов'язковим поповненням; одно- та двохбункерна системи; японська концепція «точно в строк». Підкреслюється важливість правильної організації інфраструктури господарства, що передбачає раціональне використання запасів, контроль за їх формуванням та ефективний підбір і розстановку кваліфікованих фахівців з питань матеріально-технічного забезпечення.

#### **Сутність управління запасами.**

За господарчих потреб організації та підприємства часто роблять різні запаси ресурсів: зберігаються сировина, заготівлі, готова продукція, призначена для продажу тощо. Створення запасів обумовлено:

- змінним у часі характером попиту на матеріальні ресурси (сировину, готову продукцію);
- невідповідністю обсягу й інтенсивності попиту потужностям виробництва;

- територіальною віддаленістю виробників (постачальників) від потенційних споживачів;

- сезонним характером попиту;
- інфляційними ризиками;
- можливістю отримати оптові знижки від постачальників при придбанні великої партії товару та ін.

Запасів матеріальних ресурсів не повинно бути ні забагато, ні занадто мало. У першому випадку виникають невиправдані витрати на зберігання, на амортизацію товару. У другому випадку може виявитися, що на складі не буде в достатній кількості потрібного товару; крім того, замала кількість запасів потребує їх частого поповнення, що також приводить до витрат.

Управління запасами полягає в тому, щоб уникнути обох граничних випадків і зробити загальні витрати якомога меншими.

Управління запасами – одна з найважливіших функцій логістики, яка передбачає за умови мінімізації загальних витрат вирішення таких оптимізаційних завдань:

- визначення оптимального рівня загального запасу матеріальних ресурсів;
- визначення оптимального розміру партії товару, необхідного для поповнення запасу (і відповідно – періодичності замовлень, тобто оптимального числа поставок товару за фіксовану одиницю часу).

#### **Класична модель розрахунку оптимального розміру замовлення Харріса – Уілсона.**

Існує значна кількість моделей управління запасами, серед яких можна виділити такі основні:

- однопродуктова статична модель;
- однопродуктова статична модель, яка передбачає дефіцит;
- модель із поступовим поповненням запасів;
- модель із поступовим поповненням запасів, яка припускає дефіцит;
- модель із фіксованим розміром замовлення;
- модель із фіксованою періодичністю замовлення;
- модель, яка враховує кількісні знижки.

Базовою моделлю управління запасами є модель Харріса – Уілсона (Harris – Wilson)



(Harris, 1913; Wilson, 1934), яку ще називають моделлю EOQ – Economic Order Quantity, або основною чи класичною моделлю.

За основною моделлю зв'язок між кількістю одиниць товару на складі  $Q$  і часом  $t$  описує функція зміни запасу:

- якщо на товар є попит, то функція зміни запасу  $Q = Q(t)$  убиває;
- якщо товар завозиться на склад, то ця функція зростає.

За припущеннями моделі, є один вид товару і поповнення його запасу відбувається миттєво.

При зроблених припущеннях графік функції зміни запасу складається з повторюваних циклів поповнення запасу між двома сусідніми дефіцитами; вертикальні відрізки відповідають миттєвому поповненню запасу (рис. 1).

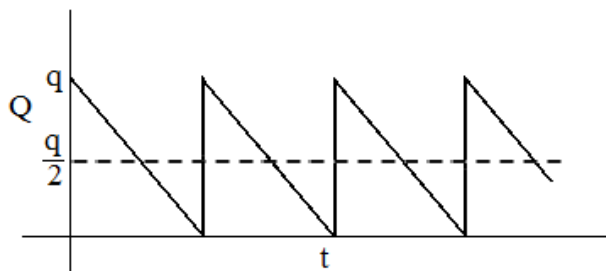


Рис. 1. Графік функції зміни запасу

Сукупні витрати  $C$ , пов'язані із запасами, можна розділити на три частини:

1. Вартість товару  $C_c$ .
2. Витрати на виконання замовлень (організаційні витрати)  $C_s$ , тобто витрати, пов'язані з оформленням товару, його доставкою, розвантаженням тощо.
3. Витрати на зберігання запасу на складі  $C_h$  протягом певного періоду часу (рік, квартал тощо), тобто витрати на оренду складу, амортизацію в процесі зберігання і т. ін.

Отже,

$$C = C_c + C_s + C_h \quad (1)$$

В статті (Harris, 1913) Ф. Харріс розглядає пов'язані із запасами сукупні (загальні) витрати  $C$  у вигляді суми постійних  $C_f$  і змінних  $C_v$  витрат впродовж деякого періоду (року), тобто:

$$C = C_f + C_v \quad (2)$$

Постійними витратами є вартість річного об'єму товару (запасів):

$$C_f = C_c \quad (3)$$

До змінних витрат відносяться організаційні витрати (пов'язані з розміщенням замовлення) та витрати на зберіганням запасу:

$$C_v = C_s + C_h \quad (4)$$

При побудові основної моделі за критерій оптимальності приймається умова мінімізації функції сумарних витрат  $C$ . Очевидно, що постійні витрати  $C_f$  не впливають на мінімум функції сумарних витрат  $C$ . Отже, критерій оптимальності моделі Харріса – Уілсона записується у вигляді:

$$C_v \rightarrow \min \quad (5)$$

або

$$C_s + C_h \rightarrow \min \quad (5')$$

На рис. 2 схематично представлені графіки функцій витрат  $C_s$  і  $C_h$ , а також сумарні витрати  $C_v$  залежно від розміру замовлення (Harris, 1913).

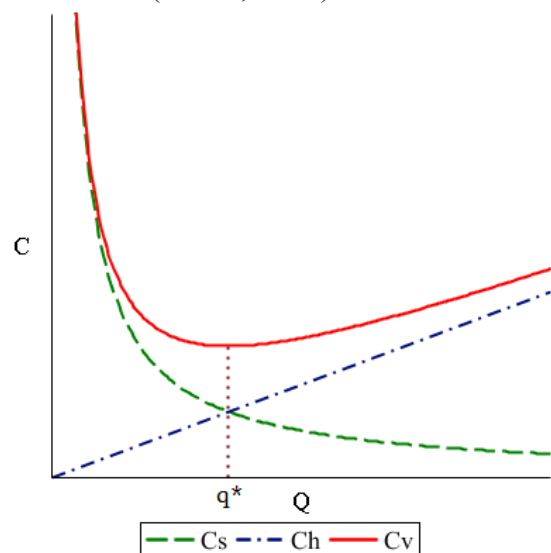


Рис. 2. Схематична ілюстрація залежності рівня витрат при управлінні запасами від розміру замовлення



Як видно з рис. 2:

- організаційні витрати зі збільшенням розміру замовлення зменшуються за гіперболічною залежністю (крива  $C_s$ );
- витрати на зберігання партії поставки зростають прямо пропорційно до розміру замовлення (пряма лінія  $C_h$ );
- крива загальних витрат (крива  $C_v$ ) – увігнута, що свідчить про наявність мінімуму, який відповідає оптимальній партії товару  $q^*$ .

Щоб отримати аналітичне співвідношення оптимального розміру партії товару  $q^*$ , розглянемо основні величини і припущення щодо них, прийняті в рамках EOQ-моделі.

Як одиницю вимірювання коштів надалі будемо використовувати умовні одиниці (у. о. – це можуть бути гривні, долари і т. п.); як одиницю вимірювання часу – рік (хоча можна було б взяти місяць, квартал і т. д.).

Приймемо такі позначення:

- ціна одиниці товару –  $c$  (у. о.). Ціна постійна для одного виду товару;
- інтенсивність попиту –  $d$  одиниць товару в рік. Попит є постійним і безперервним;
- організаційні витрати –  $s$  (у. о.) за одну партію товару. Організаційні витрати не залежать від розміру поставки, тобто від кількості одиниць товару в одній партії;

• витрати на зберігання запасу –  $h$  (у. о.) на одиницю товару в рік. Ці витрати є постійними;

• розмір однієї партії товару є постійним –  $q$  одиниць. Партія надходить миттєво в той момент, коли виникає дефіцит, тобто коли запас на складі стає рівним нулю.

Параметри  $c$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $h$  – задані. З математичної точки зору задача управління запасами полягає у знаходженні невідомого параметра  $q$  таким чином, щоб мінімізувати загальні витрати  $C$ , що визначаються формулою (1).

Для розв'язку сформульованої задачі слід виразити ці витрати  $C$  через параметри  $c$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $q$ .

В рамках моделі, що розглядається, маємо:

- оскільки річна інтенсивність попиту дорівнює  $d$ , а ціна одиниці товару –  $c$ , то загальна вартість товару на рік становитиме  $c \cdot d$ ;
- так як в одній партії  $q$  одиниць товару, а річний попит дорівнює  $d$ , то число поставок буде  $\frac{d}{q}$ .

Протягом  $\frac{d}{q}$  року організаційні витрати дорівнюють  $\frac{d}{q} \cdot s$ ;

• середній рівень запасу дорівнює відношенню площі під графіком за цикл до тривалості циклу. Цей середній рівень дорівнює  $\frac{q}{2}$  (на рис. 1 позначений пунктиром).

Оскільки річні витрати на зберігання одиниці товару дорівнюють  $h$ , то загальні витрати на зберігання складають  $\frac{q}{2} \cdot h$ .

Таким чином, у силу співвідношення (1) загальні витрати  $C$  обчислюються за формулою:

$$C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2}, \quad (6)$$

де параметри  $c$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $h$  вважаються відомими.

Потрібно знайти таке значення  $q^*$ , при якому функція  $C = C(q)$  (6) приймає найменше значення на множині  $q > 0$ :

$$\begin{cases} C = cd + \frac{sd}{q} + \frac{qh}{2} \rightarrow \min; \\ q > 0. \end{cases} \quad (7)$$

З математичної точки зору задача (7) представляє собою задачу нелінійного програмування з обмеженням у вигляді нерівності.

Для знаходження точки  $q^*$  мінімуму функції  $C = C(q)$  (6) знайдемо її

похідну  $\frac{dC}{dq}$ :

$$C'(q) = -\frac{sd}{q^2} + \frac{h}{2}. \quad (8)$$



Приврівнюючи  $C'(q)$  нулю в силу необхідної умови екстремуму функції однієї змінної, отримуємо співвідношення

$$\frac{sd}{q^2} = \frac{h}{2}, \quad (9)$$

з якого визначається  $q^*$ :

$$q^* = \sqrt{\frac{2sd}{h}}. \quad (10)$$

Формула (10) представляє собою аналітичне співвідношення для обчислення оптимального розміру партії товару і називається формулою оптимального запасу, або формулою Харріса – Уілсона.

Знайшовши оптимальний розмір замовлення  $q^*$ , можна визначити:

1. Оптимальну кількість поставок товару за рік  $n^*$ :

$$n^* = \frac{d}{q^*}. \quad (11)$$

2. Відповідну тривалість циклу зміни запасу  $t^*$ :

$$t^* = \frac{365}{n^*}. \quad (12)$$

#### Обмеження моделі Харріса – Уілсона

Формула класичної моделі (10) виведена при низці припущень і описує деяку ідеалізовану систему та умови, не здійснені в реальному житті.

Обмеження моделі Харріса – Уілсона детально описані в книзі (Lambert, Stock, Ellram, 1998, с. 125–126):

- рівень попиту на товар постійний впродовж усього планового періоду;
- час виконання замовлення постійний;
- витрати на розміщення замовлення (організаційні витрати) постійні;
- витрати на транспортування заказу постійні;
- попит споживачів задовольняється в повному обсязі;
- транзитні запаси відсутні;
- запас лише одного виду продукції;

- діапазон планування необмежений;
- фінансові ресурси необмежені.

Також в статті (Wilson, 1934) підкреслюється, що модель EOQ розроблена як практичний інструмент, який слід осмислено використовувати.

На ряд обмежень моделі при її практичному використанні вказує і автор публікації (Архіпов, 2012); зокрема:

- за моделлю може бути отримане неціле значення оптимального розміру партії товару, яке, зрозуміло, не можна використовувати «механічно»;
- розраховане значення кількості замовлень теж може виявитися нецілим числом;
- можливі обмеження, продиктовані умовами поставки (наприклад, по 100, 200, 300 од. і т. ін.);
- можливі обмеження, пов'язані з бюджетом підприємства.

У цьому зв'язку доцільним є поширення моделі Харріса – Уілсона на більш загальні випадки вихідних даних задачі.

**Узагальнена модель розрахунку оптимального розміру замовлення зі змінними організаційними витратами і витратами на зберігання запасу товару.**

При побудові основної моделі передбачалося, що організаційні витрати  $s$  і витрати на зберігання запасу товару  $h$  постійні, тобто не залежать від розміру поставки  $q$  (кількості одиниць товару в одній партії).

Узагальнимо далі основну модель на випадок, коли організаційні витрати і витрати на зберігання запасу товару залежать від розміру поставки, тобто

$$s = s(q); \quad h = h(q). \quad (13)$$

Отже, вираз (6) функції загальних витрат  $C = C(q)$  перетвориться таким чином:

$$C(q) = cd + \frac{ds(q)}{q} + \frac{qh(q)}{2}. \quad (14)$$

Тоді співвідношення для похідної функції  $C(q)$  набуде вигляд:

$$C'(q) = d \frac{s'(q) \cdot q - s(q)}{q^2} + \frac{h(q) + qh'(q)}{2} = \frac{ds'(q)}{q} - \frac{ds(q)}{q^2} + \frac{h(q)}{2} + \frac{qh'(q)}{2}. \quad (15)$$

Необхідна умова екстремуму функції  $C(q)$ :  $C'(q)=0$  (16)  
 для визначення критичних точок приводить до алгебраїчного рівняння

$$\frac{ds'(q)}{q} - \frac{ds(q)}{q^2} + \frac{h(q)}{2} + \frac{qh'(q)}{2} = 0, \quad (17)$$

яке залежно від виду функцій  $s = s(q)$  і  $h = h(q)$ , що входять до нього, може бути розв'язано точно або приблизно, наприклад, чисельними методами або графічним способом.

Після визначення із співвідношення (17) оптимального розміру партії товару  $q^*$  можуть бути знайдені оптимальне число поставок товару за рік  $n^*$ , тривалість циклу зміни запасу  $t^*$  і значення функції загальних витрат відповідно за формулами (11), (12), (14).

### Цифрова модель оптимізації логістичних витрат

Як приклад, розглянемо задачу управління запасами за таких умов:

- інтенсивність рівномірного попиту  $d$  становить 800 одиниць товару на рік;
- організаційні витрати  $s$  (у. о.) та витрати на зберігання запасу  $h$  (у. о.) залежать від розміру поставки (тобто від кількості одиниць товару в одній партії  $q$ ) і описуються відповідно співвідношеннями:

$$s(q) = \frac{2}{(\sqrt{q} + 1)^2}; \quad h(q) = \frac{\ln(q + \ln q)}{55}; \quad (18)$$

- ціна товару  $c$  складає 7 (у. о.).

В даному випадку вираз для функції загальних витрат (14) приймає вигляд:

$$C(q) = 7 \cdot 800 + \frac{800 \cdot 2}{q \cdot (\sqrt{q} + 1)^2} + \frac{q \cdot \ln(q + \ln(q))}{2 \cdot 55} = 5600 + \frac{1600}{q(\sqrt{q} + 1)^2} + \frac{q \ln(q + \ln q)}{110}. \quad (19)$$

Далі всі аналітичні перетворення та числові розрахунки виконані в математичному редакторі Maple 18.

Використовуємо необхідну умову екстремуму функції однієї змінної  $C'(q)=0$  для визначення критичних точок. Для цього знаходимо першу похідну функції  $C(q)$  (19) (рис. 3) та здійснюємо її елементарні перетворення (рис. 4).

```

> 5600 + 1600 / (q * (sqrt(q) + 1)^2) + q * ln(q + ln(q)) / 110
> diff(5600 + 1600 / (q * (sqrt(q) + 1)^2) + (1/110) * q * ln(q + ln(q)), q);
- 1600 / (q^2 * (sqrt(q) + 1)^2) - 1600 / (q^3/2 * (sqrt(q) + 1)^3) + 1/110 * ln(q + ln(q)) + 1/110 * q * (1 + 1/q) / (q + ln(q))
    
```

Рис. 3. Обчислення першої похідної функції  $C(q)$   
 в математичному редакторі Maple 18



```

> -1600/(q^2*(sqrt(q)+1)^2) - 1600/(q^(3/2)*(sqrt(q)+1)^3) + 1/110*ln(q+ln(q)) + 1/110*q*(1+1/q)
> simplify(-1600/(q^2*(sqrt(q)+1)^2) - 1600/(q^(3/2)*(sqrt(q)+1)^3) + (1/110)*ln(q+ln(q)) + (1/110)*q*(1+1/q)/(q+ln(q)), 'size');
-1600/(q^2*(sqrt(q)+1)^2) - 1600/(q^(3/2)*(sqrt(q)+1)^3) + 1/110*ln(q+ln(q)) + (q+1)/(110*q+110*ln(q))

```

Рис. 4. Операція перетворення похідної  $C'(q)$ 

Прирівнюємо нулю отриманий вираз  $C'(q)$  і розв'язуємо трансцендентне рівняння (рис. 5).

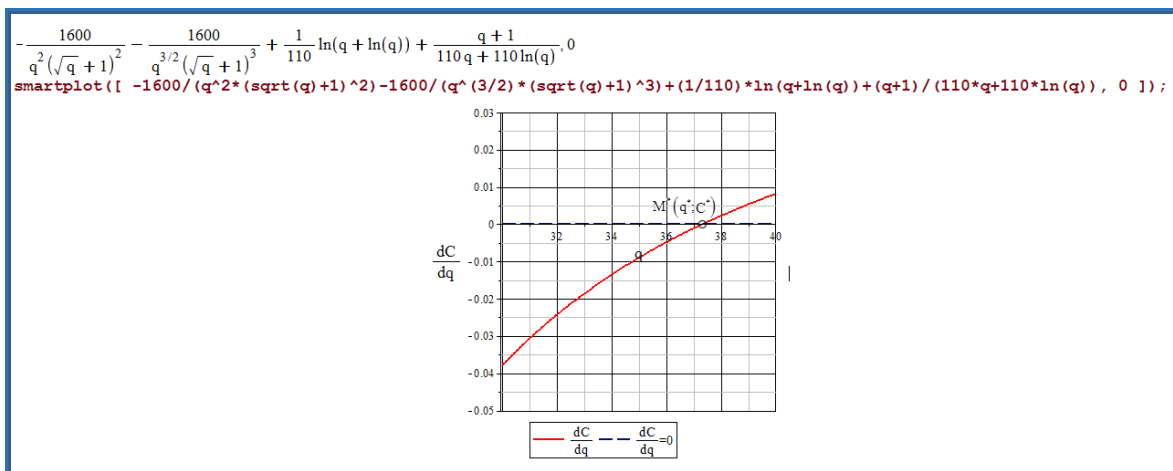
```

> -1600/(q^2*(sqrt(q)+1)^2) - 1600/(q^(3/2)*(sqrt(q)+1)^3) + 1/110*ln(q+ln(q)) + (q+1)/(110*q+110*ln(q))
> fsolve(-1600/(q^2*(sqrt(q)+1)^2) - 1600/(q^(3/2)*(sqrt(q)+1)^3) + (1/110)*ln(q+ln(q)) + (q+1)/(110*q+110*ln(q)), 0);
37.32260396

```

Рис. 5. Розв'язок трансцендентного рівняння  $C'(q) = 0$ 

Відмітимо, що рівняння  $C'(q) = 0$  можна було б розв'язати графічним способом (рис. 6).

Рис. 6. Графічним розв'язок рівняння  $C'(q) = 0$ 

З рис. 6 отримуємо, що при  $q \geq 1$  функція  $C = C(q)$  має одну критичну точку  $M^*(q^*; C^*)$ , абсциса якої, округлена до цілого, приймає значення:  $q^* = 37$ .

При переході через критичну точку  $M^*(q^*; C^*)$  похідна функції  $C = C(q)$  змінює свій знак з «мінуса» на «плюс». А це в силу достатньої умови екстремуму функції однієї змінної означає, що функція загальних витрат  $C = C(q)$  (14) має в критичній точці  $M^*(q^*; C^*)$  екстремум – мінімум.

Знаходимо при  $q = q^*$  значення (рис. 7):

- функції загальних витрат (14)  $C(q^*)$ ;
- оптимального числа поставок товару за рік  $n^*$  (11);
- тривалості циклу зміни запасу  $t^*$  (12).

```
> q := 37;
q := 37
> C := evalf(5600 + 1600 / (q * (sqrt(q) + 1)^2) + q * ln(q + ln(q)) / 110);
C := 5602.107914
> n := evalf(800 / q);
n := 21.62162162
> t := evalf(365 / n);
t := 16.88125000
```

Рис. 7. Обчислення оптимальних значень функції загальних витрат, числа поставок товару за рік та тривалості циклу зміни запасу

### Висновки

На сучасному етапі розвитку ринкових відносин у всіх сферах господарювання спостерігається конкуренція суб'єктів ринку, що зумовлює пошук ефективних методів управління запасами.

На сьогоднішній день все більшої актуальності набувають питання забезпечення логістичних процесів взаємодії між підприємствами-виробниками та споживачами, посередниками, складами та транспортною мережею. У процесі господарської діяльності підприємства конкурують один з одним в логістичних підходах, прагнучі підвищення якості доставки продукції, покращення обслуговування споживачів – причому з мінімальними витратами. Найважливішою умовою тут є вимоги щодо зниження витрат на складування запасів, їх транспортування та своєчасне поповнення.

Методи логістики виступають одним із надійних інструментів для підвищення конкурентоспроможності підприємств на товарних ринках, оскільки саме скорочення витрат на транспортно-складські операції багато в чому визначає лідерство підприємства у системі ринкових відносин.

Таким чином, управління запасами є

одним із найважливіших процесів, який має постійно оптимізуватися відповідно до конкретних умов та ретельно контролюватися, – для максимально ефективного створення запасів, їх витрат та поповнення і, як слідство, мінімізації витрат підприємства.

Для оптимізації управління запасами ефективною є модель Харріса – Уілсона, де цільовою функцією є сукупні (загальні) витрати за умови їх мінімізації. Визначено економічний зміст моделі та надано її математичну трактовку як оптимізаційної задачі нелінійного програмування. Проаналізовано припущення й обмеження моделі Харріса – Уілсона.

На підставі EOQ-моделі управління запасами розроблено узагальнену модель розрахунку оптимального розміру замовлення зі змінними організаційними витратами і витратами на зберігання запасу товару, де критерієм оптимізації є мінімізація загальних очікуваних витрат підприємства.

Розроблено узагальнену цифрову модель оптимізації логістичних витрат та надано із застосуванням математичного редактора Maple 18 алгоритм її практичного використання для мінімізації витрат органів публічного управління.

### БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

- Архіпов, С. (2012). Модифікація моделі управління запасами Харріса-Уілсона. *Економіст*, 1, 59–62. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/econ\\_2012\\_1\\_15](http://nbuv.gov.ua/UJRN/econ_2012_1_15).
- Данько, Т. В., & Беломитцева А. А. (2011). Сучасні підходи до використання логістичних моделей при діагностиці каналу розподілу. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Темат. вип. «Актуальні проблеми управління та фінансово-господарської діяльності підприємства»*, 38, 19–24.



- Ларіна, Р. Р. (2004). *Регіональні логістичні системи (формування, управління та стратегія розвитку* : монографія. Донецьк : «ВИК». 372 с.
- Ларіна, Р. Р. (2005). *Теоретико-методологічні основи формування регіональних логістичних систем* : дис... д-ра екон. наук : 08.10.01 / Ларіна Р. Р. Донецьк. 490 с.
- Перебийніс, В. І., & Дроботя Я. А. (2012). *Логістичне управління запасами на підприємствах* : монографія. Полтава : ПУЕТ. 279 с.
- Різник, В. В. (2015). Теоретичні аспекти управління виробничими запасами підприємства. *Економічний вісник університету*, 24 (1), 50–56.
- Санько, Я. В., & Григорова Д. В. (2011). Щодо формування витратної частини логістичної системи при визначенні цінової політики підприємства. *Науково-технічний збірник*, 101, 311–316.
- Хаврук, В. А. (2012). Аналіз систем управління запасами. *Вестник НТУ*, 26, 313–324.
- Череп, А. Г. (2007). Управление моделями запасов на предприятии. *Бизнес-Информ*, 1-2, 68–72.
- Череп, О. Г. (2010а). Удосконалення оптимізації витрат на складування матеріально-технічних запасів на підприємствах. *Формування ринкових відносин в Україні*, 6 (109), 163–166.
- Череп, О. Г. (2010b). Удосконалення управління логістичною системою. *Формування ринкових відносин в Україні*, 3 (106), 27–30.
- Чорнорот, Я. О. (2015). Побудова базової моделі управління запасами з використанням теорії комплексних чисел. *Наук. вісник Херсонського держ. ун-ту*, 11, 164–166.
- Harris, F. W. (1913). How many parts to make at once. *The magazine of management*, 10(2), 135–136, 152.
- Lambert, D. M., Stock J. R., & Ellram L. M. (1998). *Fundamentals of Logistics Management*. Boston: McGraw-Hill, 611 p.
- Wilson, R. H. (1934). A scientific routine for stock control. *Harvard Business Review*, 13(1), 116–128.

## REFERENCES

- Arkipov, S. (2012). A modification of the Harris-Wilson inventory management model. *Economist*, 1, 59–62. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/econ\\_2012\\_1\\_15](http://nbuv.gov.ua/UJRN/econ_2012_1_15).
- Cherep, A. G. (2007). Management of inventory models at the enterprise. *Business-Inform*, 1-2, 68–72.
- Cherep, O. G. (2010). Improvement of cost optimization for storage of material and technical stocks at enterprises. *Formation of market relations in Ukraine*, 6 (109), 163–166.
- Cherep, O. G. (2010). Improvement of logistics system management. *Formation of market relations in Ukraine*, 3 (106), 27–30.
- Chornorot, Ya. O. (2015). Building a basic inventory management model using the theory of complex numbers. *Science Herald of the Kherson State. Univ.*, 11, 164–166.
- Danko, T. V., & Belomytseva A. A. (2011). Modern approaches to the use of logistic models in the diagnosis of the distribution channel. *Bulletin of the National technical KhPI University. Thematic issue*, 38, 19–24.
- Harris, F. W. (1913). How many parts to make at once. *The magazine of management*, 10(2), 135–136, 152.
- Havruk, V. A. (2012). Analysis of inventory management systems. *Bulletin of NTU*, 26, 313–324.
- Lambert, D. M., Stock J. R., & Ellram L. M. (1998). *Fundamentals of Logistics Management*. Boston : McGraw-Hill, 611 p.
- Larina, R. R. (2004). *Regional logistics systems (formation, management and development strategy)*: monograph. Donetsk: "VYK". 372 p.
- Larina, R. R. (2005). *Theoretical and methodological foundations of the formation of regional logistics systems: dissertation... Dr. Econ. Sciences: 08.10.01 / Larina R. R. Donetsk. 490 p.*
- Perebijnis, V. I., & Drobotya Ya. A. (2012). *Logistics management of stocks at enterprises*: monograph. Poltava: PUET. 279 p.
- Riznyk, V. V. (2015). Theoretical aspects of enterprise inventory management. *Economic Bulletin of the University*, 24 (1), 50–56.
- Sanko Ya. V., & Grigorova D. V. (2011). Regarding the formation of the cost part of the logistics system when determining the price policy of the enterprise. *Scientific and technical collection*, 101, 311–316.
- Wilson, R. H. (1934). A scientific routine for stock control. *Harvard Business Review*, 13(1), 116–128.